1. Flambagem

1.1. Introdução

Flambagem ou encurvadura é um fenômeno que ocorre em peças esbeltas (peças onde a área de secção transversal é pequena em relação ao seu comprimento), quando submetidas a um esforço de compressão axial. A flambagem acontece quando a peça sofre flexão tranversalmente devido à compressão axial. A flambagem é considerada uma instabilidade elástica, assim, a peça pode perder sua estabilidade sem que o material já tenha atingido a sua tensão de escoamento. Este colapso ocorrerá sempre na direção do eixo de menor momento de inércia de sua seção transversal. A tensão crítica para ocorrer a flambagem não depende da tensão de escoamento do material, mas da seu módulo de Young.

1.2. Definições

Os sistemas mecânicos e estruturas em geral quando estão submetidos a carregamentos, podem falhar de várias formas, o que vai depender do material usado, do tipo de estrutura, das condições de apoio, entre outras considerações. Quando se projeta um elemento, é necessário que ele satisfaça requisitos específicos de tensão, deflexão e estabilidade.

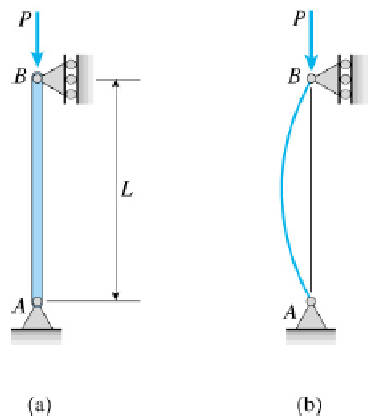


Figura 28 – Flambagem de uma coluna devido a um carregamento axial de compressão P.

Definição: Elementos compridos e esbeltos sujeitos a uma força axial de compressão são chamados de colunas e a deflexão lateral que sofrem é chamada de flambagem. Em geral a flambagem leva a uma falha repentina e dramática da estrutura.

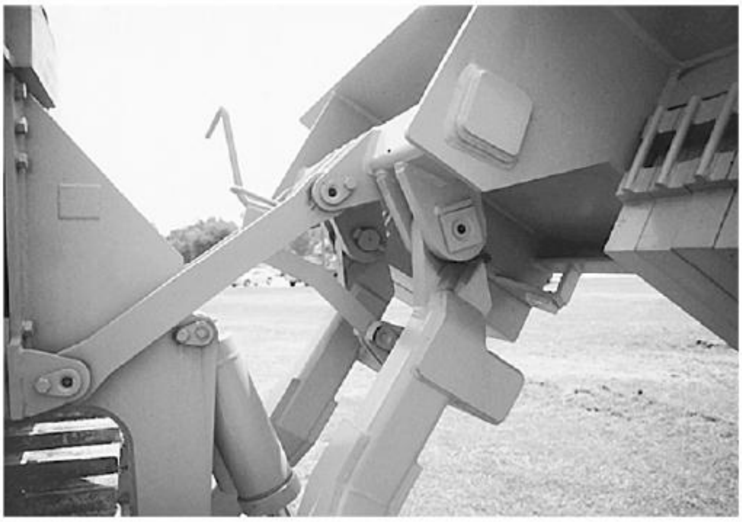


Figura 29 - Alguns elementos acoplados com pinos usados em partes móveis de maquinaria, como este elo curto, estão sujeitos a cargas de compressão e, assim agem como colunas.

1.3. Cálculo da carga Crítica (P_{cr})

É a carga axial máxima que uma coluna pode suportar antes de ocorrer a flambagem. Qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna.

Para compreender melhor esse tipo de instabilidade, considere um mecanismo formado por duas barras sem peso, rígidas e acopladas por pinos nas duas extremidades.

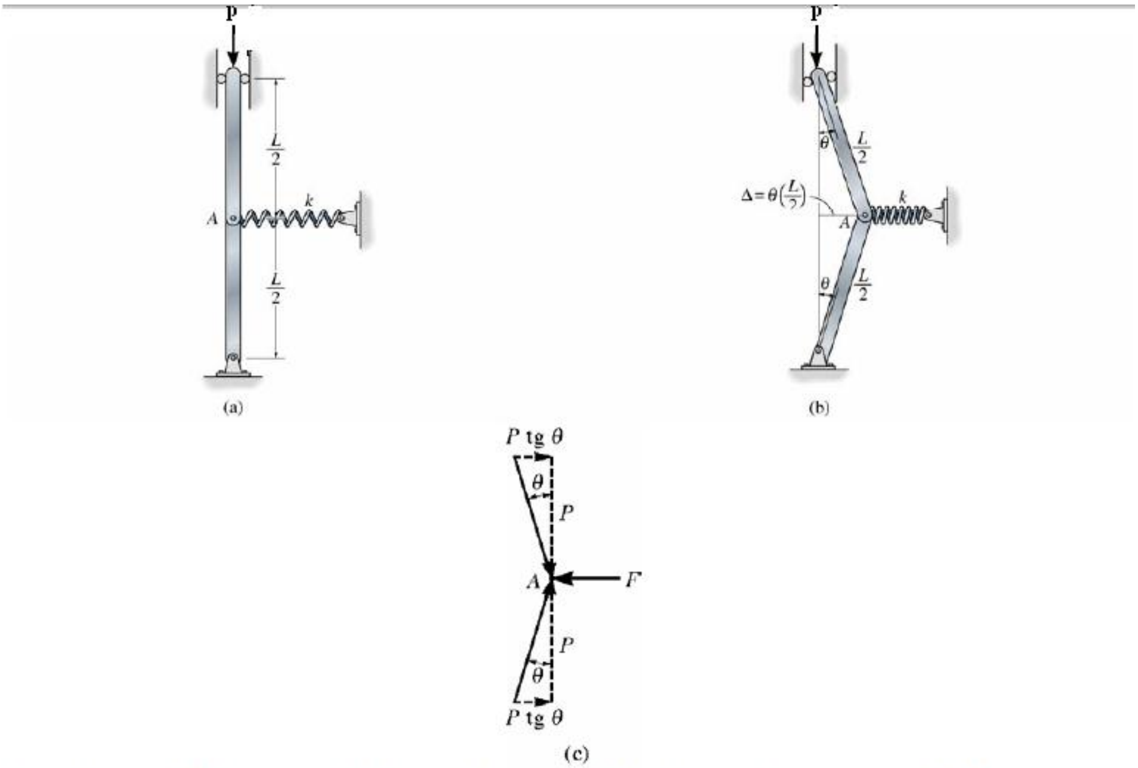


Figura 30 –(a) Mola com rigidez k sem deformação (b) Deslocamento do pino em A de uma posição Δ (c) Diagrama de corpo livre.

Tipos de equilíbrio

- $P < \frac{KL}{4}$: Equilíbrio estável
- $P > \frac{KL}{4}$: Equilíbrio instável (1)
- $P = \frac{KL}{4}$: Equilíbrio neutro (Carga Crítica)

Os estados de equilíbrio apresentados na expressão (1) estão mostrados na Figura 31.

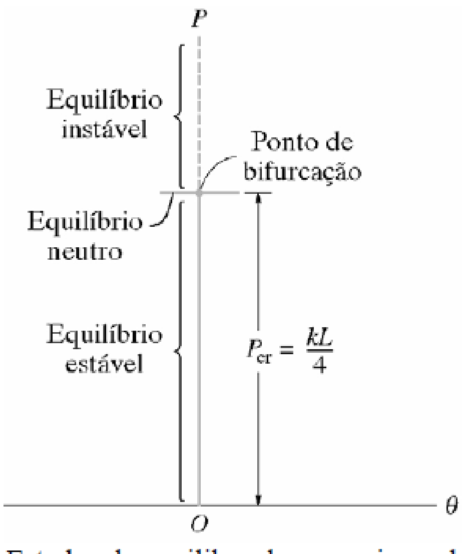


Figura 31 - Estados de equilibro do mecanismo da Figura 3.

As três condições de equilíbrio representadas pela Figura 31 são similares àquelas de uma bola colocada sobre uma superfície lisa, como na Figura 32.

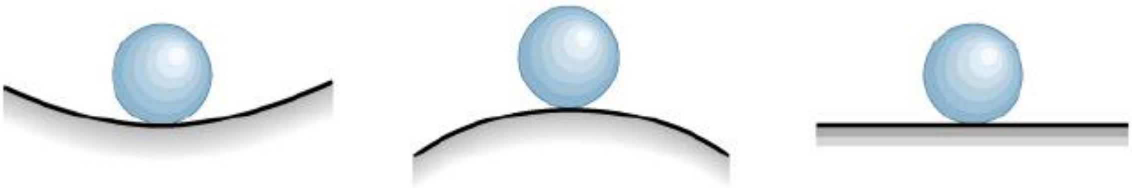


Figura 32 – Bola em equilíbrio, estável, instável e neutro.

Colunas com apoios simples (pinos)

A coluna da Figura 33 é carregada por uma força vertical *P* que é aplicada através do centróide da seção transversal da extremidade. A coluna é perfeitamente reta e é feita de um material elástico linear que segue a lei de Hooke. Uma vez que se considera que a coluna não tem imperfeições, ela é chamada de coluna ideal.

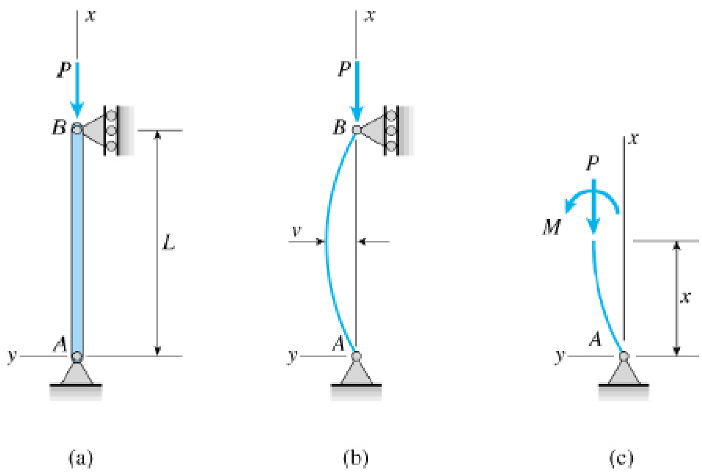


Figura 33 - Coluna com extremidades apoiadas por pinos: (a) Coluna Ideal, (b) Forma em flambagem (c) Força axial *P* e momento fletor *M* agindo na seção transversal.

Comportamento da Coluna Ideal:

- Se $P < P_{cr}$, a coluna está em equilíbrio estável na posição reta.
- Se $P = P_{cr}$, a coluna está em equilíbrio neutro tanto na posição reta quanto na posição levemente flexionada.

➢ Se $P > P_{cr}$, a coluna está em equilíbrio instável na posição retilínea e irá flambar sobre a menor

Equação diferencial para flambagem de coluna:

Para determinar os carregamentos críticos correspondentes às formas defletidas para uma coluna real apoiada por pinos, usamos as equações diferenciais da curva de deflexão de uma viga. Essas equações são aplicáveis a uma coluna flambada porque a coluna flete como se fosse uma viga. Tem-se a seguinte equação:

$$EIv = M \qquad (2)$$

Onde,

$$M = -Pv \qquad (3)$$

E se a coluna flambar para a direita?

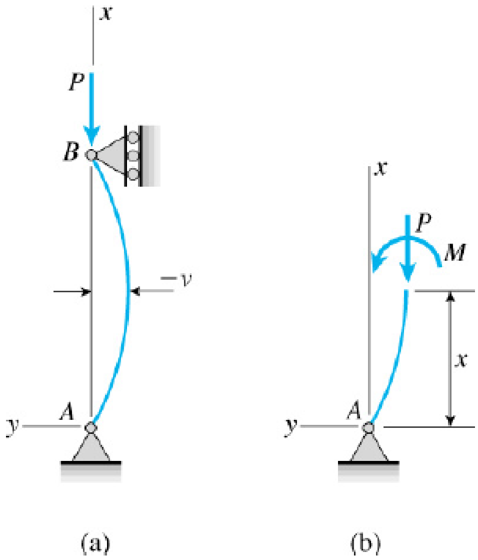


Figura 34 – Coluna com extremidades apoiadas por pinos (Direção alternativa de flambagem)

A equação diferencial da curva se torna

$$EIv = - Pv \qquad (4)$$

A eq. (4) é uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes.

Solução da equação diferencial

$$K^2 = \frac{P}{EI} \qquad (5)$$

A solução geral da equação (4) é:

$$V = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \qquad (6)$$

As duas condições de contorno são determinadas pelas condições de contorno nas extremidades da coluna. Como V = 0 em x = 0. E como V = 0 em x = L, então:

$$C_1 \sin kL = 0 \qquad (7)$$

A equação (7) é satisfeita se:

$$\sqrt{kL} = n\pi \qquad (8)$$

Ou

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}, n = 1,2,3, \ldots \qquad (9)$$

O menor valor de *P* é obtido quando *n=1*, e a carga crítica para a coluna, é portanto:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (10)$$

P → Carga crítica ou carga axial máxima na coluna imediatamente antes da flambagem, essa carga não deve permitir que a tensão na coluna exceda o limite de proporcionalidade.

E →módulo de elasticidade do material

I →O menor momento de inércia da área da seção transversal.

L→ Comprimento da coluna sem apoio, cujas extremidades são apoiadas por pinos.

P_{cr} →Denomina-se também de carga de Euler em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, que solucionou o problema em 1757.

Em projeto se utiliza a eq. (10) em função do raio de giração, onde o momento de inércia é:

$$I = Ar^2 \qquad (11)$$

Onde *A* e a área da seção transversal e *r* o raio de giração da área da seção transversal. Dessa forma tem-se:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E(Ar^2)}{L^2} \rightarrow \left(\frac{P_{cr}}{A}\right) = \frac{\pi^2 E}{\left(L/_r\right)^2} \qquad (12)$$

Dessa forma,a tensão critica e dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(L/_r\right)^2} \qquad (13)$$

Onde

σ_{cr} - Tensão critica que é a tensão media na coluna imediatamente antes de a coluna flambar, essa tensão é uma tensão elástica e, portanto, $\sigma_{cr} \leq \sigma_E$

E - módulo de elasticidade do material

L - comprimento da coluna sem apoio, cujas extremidades são presas por pinos

R - o menor raio de giração da coluna, determinado por $r = \sqrt{I/_A}$, onde *I* e o menor momento de inércia da área da seção transversal *A* da coluna.

A forma fletida correspondente e definida pela equação.

$$V = C_1 \sin \frac{\pi x}{L} \qquad (14)$$

Aqui a constante C_1 representa a deflexão máxima, v_{max} , que ocorre no ponto médio da coluna como apresenta a Figura 35. Valores para C_1 não podem ser obtidos, pois se desconhece a forma fletida exata da coluna. Por exemplo, se *n=2* aparecerão duas ondas na forma flambada como na Figura 35.c.

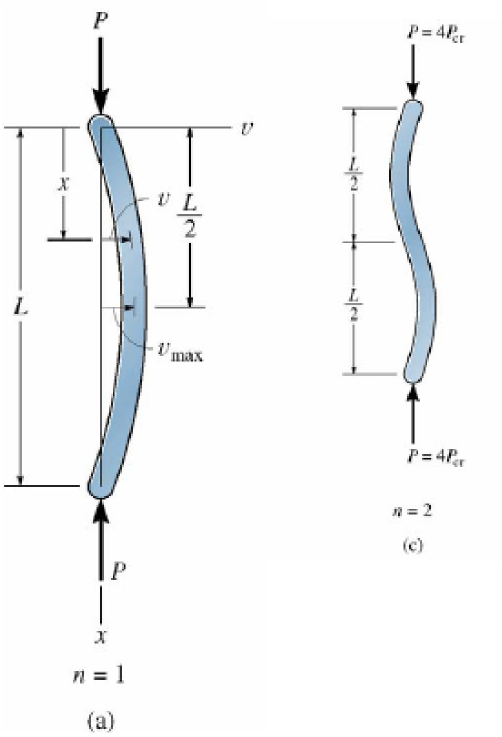


Figura 35 – (a) Modo de flambagem para n=1 (c) Modo de flambagem para n=2

Representa-se o comportamento carga-deflexao da coluna ideal pelo gráfico mostrado na Figura 36.

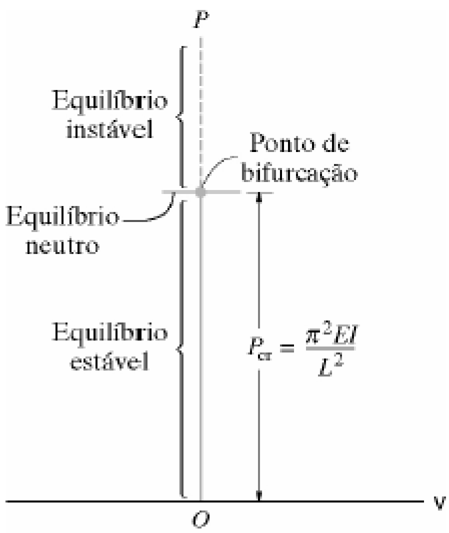


Figura 36- Comportamento carga deflexão para a coluna ideal.

A carga crítica expressa em (10) independe da resistência do material dependendo apenas das dimensões da seção e comprimento da coluna (*I* e *L*) e módulo de elasticidade *E* do material que compõe a coluna.

À medida que o momento de inércia sobe, a capacidade de carga da coluna sobe. As colunas eficientes são projetadas de tal forma que a quantidade de material fique mais distante possível dos eixos principais.

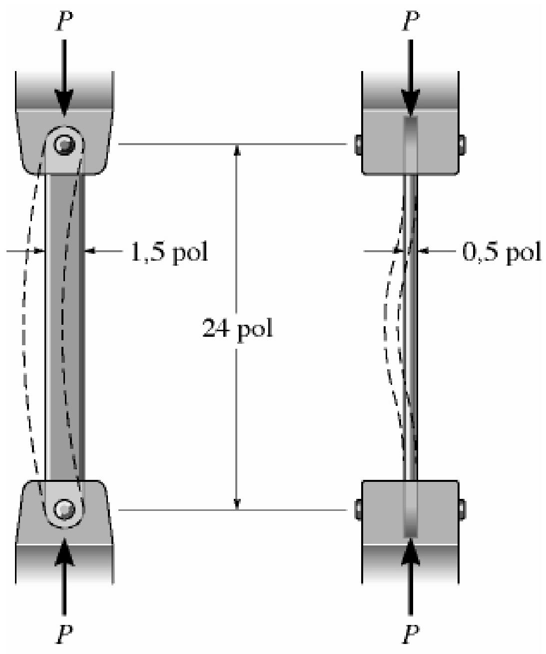
Nota-se também que a coluna sofrerá flambagem em torno do eixo principal da seção transversal de menor momento de inércia (o eixo mais fraco), por exemplo, uma coluna de seção retangular sofre flambagem em torno do eixo *a*-*a* como apresenta a Figura 37.

Figura 37 – Flambagem da coluna em torno do eixo com menor momento de inércia.

Os engenheiros tentam construir colunas onde os momentos de inércia em relação à x e a y sejam iguais, por isso que colunas na forma de tubo ou quadradas são ideais.

1.4. Exercícios

O elo de aço ferramenta L-2 usado em uma máquina de forja é acoplado aos garfos por pinos nas extremidades. Determinar a carga máxima P que ele pode suportar sem sofrer flambagem. Usar um fator de segurança para flambagem de F.S. = 1,75. Observar, na figura da esquerda, que as extremidades estão presas por pino para flambagem e, na da direita, que as extremidades estão engastadas.



Solução:

$$E = 29\times10^6 \ \frac{\text{lbf}}{\text{pol}^2}$$

$$L = 24 \text{ pol}$$

No problema temos que: a) $k = 1$ (coluna entre pinos)

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0{,}5\times1{,}5^3}{12} = 0{,}140625 \text{ pol}^4$$

Assim:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kL)^2} = \frac{\pi^2\times29\times10^6\times0{,}140625}{(1\times24)^2} \Rightarrow P_{cr} = 69877{,}6 \text{ lbf}$$

No problema temos que: b) $k = 0{,}5$ (coluna entre engastes)

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1{,}5\times0{,}5^3}{12} = Ix = 0{,}015625 \text{ pol}^4$$

Assim:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kL)^2} = \frac{\pi^2\times29\times10^6\times0{,}015625}{(0{,}5\times24)^2} \Rightarrow P_{cr} = 31056{,}7 \text{ lbf}$$

Então: $P_{adm} = \dfrac{P_{cr}}{F.S.} = \dfrac{31056{,}7}{1{,}75} = 17746 \text{ lbf}$

A carga máxima que o elo pode sofrer sem flambagem é de P = 17,7 kip.

Referências Bibliográficas

BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON JR., E. Russell. **Resistência dos materiais.** 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1995. 652 p.